Integralrechnung einer Variablen

7

Was ist ein riemannsches Integral?

Wann ist eine Funktion integrierbar?

Was ist eine Stammfunktion?

Welchen Zusammenhang gibt es zwischen Differenzial- und Integralrechnung?

Teil II

L. Göllmann et al., *Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden*, DOI 10.1007/978-3-662-53867-8_7

Teil II

In allen angewandten Wissenschaften gibt es Größen, die in einem einfachen, proportialen Zusammenhang zueinander stehen. So kennen wir beispielsweise aus der Physik die Zusammenhänge zwischen Arbeit, Kraft und Weg ($W = F \cdot s$), oder Energie, Leistung und Zeit ($E = P \cdot t$). Diese einfachen proportionalen Entsprechungen sind allerdings nur dann gültig, wenn wir es mit konstanten, voneinander unabhängigen Größen zu tun haben. Ist dagegen ein Faktor, beispielsweise die Kraft F, vom Weg s abhängig, so stellt sich die Frage, wie wir aus dem speziellen Zusammenhang $W = Fs$ eine Beziehung entwickeln können, die es uns erlaubt, auch in dieser Situation die Arbeit W aus der Kraftfunktion $F(s)$ und dem zurückgelegten Weg zu bestimmen. Die Integralrechnung bietet uns eine Möglichkeit, mit derartigen Situationen zurechtzukommen.

7.1 Das bestimmte Integral

Zur Einführung in die Integralrechnung bietet es sich an, den Begriff des bestimmten Integrals anhand einer Problemstellung aus der Praxis zu erläutern. Hierzu betrachten wir den Verlauf des Treibstoffverbrauchs eines Verbrennungsmotors während seiner Betriebszeit, des Zeitintervalls $[0, T]$. Die momentane Verbrauchsrate $\Phi(t)$ gibt die Durchflussmenge des Treibstoffs zum Zeitpunkt t an (Abb. 7.1) und wird beispielsweise in Litern pro Stunde gemessen.

Die Verbrauchskurve ist in diesem Beispiel vergleichsweise einfach aufgebaut. Wir gehen davon aus, dass beim Start des Motors zum Zeitpunkt $t = 0$ das Gas linear bis zum Zeitpunkt t_1 gesteigert wird. Im Zeitraum $[t_1, t_2]$ wird die Drehzahl konstant gelassen. Hier stellt sich die konstante Verbrauchsrate $\Phi_{\max}$ ein. Im letzten Betriebsintervall $[t_2, T]$ wird das Gas linear auf $\Phi(T) = 0$ heruntergeregelt.

Uns interessiert nun, wie viel Treibstoff die Maschine während ihrer gesamten Betriebsdauer im Zeitraum $[0, T]$ verbraucht hat.

In diesem Beispiel gibt es drei Betriebsphasen, die durch unterschiedliche Verbrauchskurven gekennzeichnet sind. In der mittleren Phase, von t_1 bis t_2, ist bedingt durch den hier konstant vorliegenden Verbrauch $\Phi_{\max}$ die Treibstoffmenge sehr leicht zu bestimmen. Hierzu brauchen wir lediglich die konstante Verbrauchsrate mit der zeitlichen Dauer dieser Betriebsphase zu multiplizieren:

$$V_2 = \Phi_{\max} \cdot (t_2 - t_1).$$

Da der Verbrauch in Litern pro Stunde und die Zeit entsprechend in Stunden gemessen wird, ergibt dieses Produkt ein Volumen, dessen Einheit durch Liter gegeben ist. Das Treibstoffvolumen wird in Abb. 7.1 grafisch durch die Rechteckfläche zwischen der Verbrauchsrate Φ und der Zeitachse, begrenzt durch die Zeitpunkte t_1 und t_2, dargestellt. Wie können wir nun für die erste und die letzte Betriebsphase den benötigten Treibstoff berechnen? In der ersten Phase, also im Zeitraum $[0, t_1]$, steigt der Verbrauch konstant an. Die Durchflussrate ist also nicht wie in der mittleren Phase konstant, sondern steigt gleichmäßig an. Wenn wir nun die mittlere Verbrauchsrate $\frac{\Phi_{\max}}{2}$ in diesem Zeitraum mit der Dauer dieser Phase multiplizieren, so ergibt dies das in dieser Phase benötigte Treibstoffvolumen V_1:

$$V_1 = \frac{\Phi_{\max}}{2} \cdot t_1.$$

Auch in diesem Fall können wir den Verbrauch als Fläche interpretieren. Der Term zur Berechnung von V_1 ergibt den Inhalt der Dreiecksfläche, die begrenzt wird durch die Verbrauchskurve, die Zeitachse und durch die senkrechte Achse oberhalb des Zeitpunktes t_1. Ähnlich gehen wir zur Ermittlung des in der letzten Phase benötigten Treibstoffvolumens vor:

$$V_3 = \frac{\Phi_{\max}}{2} \cdot (T - t_2).$$

Es ergibt sich somit für die gesamte Treibstoffmenge, die im Verlauf der Betriebszeit durch die Maschine verbrannt wird:

$$\begin{aligned} V &= V_1 + V_2 + V_3 \\ &= \Phi_{\max} \cdot \left(\frac{t_1}{2} + t_2 - t_1 + \frac{T - t_2}{2} \right) = \frac{\Phi_{\max}}{2} \cdot (t_2 + T - t_1). \end{aligned}$$

In diesem Beispiel ist die Berechnung des Treibstoffvolumens bedingt durch die linear ansteigende, konstante und linear abfallende Verbrauchskurve recht einfach. Dies sieht anders aus, wenn die Verbrauchskurve einen nichtlinearen Verlauf hat. Auch in diesem Fall können wir die Treibstoffmenge als Fläche unter der Verbrauchskurve bis zur Zeitachse interpretieren. Wie können wir aber auch in der nichtlinearen Situation rechnerisch die Treibstoffmenge bestimmen? Wenn uns der durchschnittliche Verbrauch während der gesamten Betriebszeit vorliegt, so ist diese Aufgabe recht einfach zu lösen. Wir müssten lediglich den Durchschnittsverbrauch mit der Betriebsdauer multiplizieren. In der Regel liegt uns jedoch dieser Mittelwert nicht vor. Wir müssen versuchen, direkt mit der Verbrauchsfunktion $\Phi(t)$ zu arbeiten.

Aufgabenstellungen dieser Art gibt es in vielen Anwendungsbereichen. Beispielsweise kennen wir aus der Mechanik den Zusammenhang zwischen Arbeit, Kraft und Weg:

$$W = F \cdot s.$$

Dieses Gesetz gilt, wenn die Kraft F, die auf einen Körper wirkt, sich während der gesamten Wegstrecke s nicht ändert, also konstant bleibt. Wie kann aber die Arbeit W berechnet werden, wenn die Kraft abhängig ist vom Weg, also eine Funktion $F = F(s)$ des Weges s darstellt? Trägt man die Kraftfunktion $F(s)$ in einem Diagramm gegen den Weg auf, so kann die Arbeit als Fläche zwischen s-Achse und Kraftkurve $F(s)$ betrachtet werden.

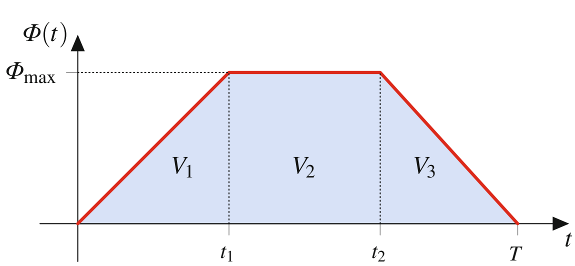

Abb. 7.1 Verbrauchsrate des Treibstoffs

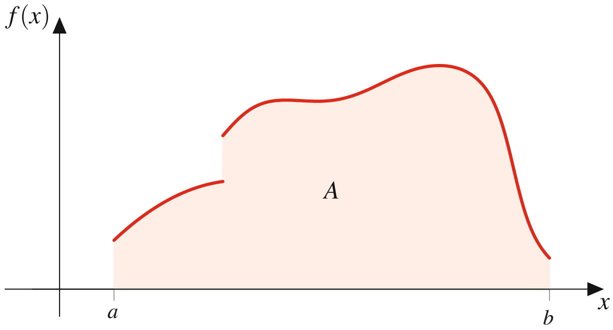

Abb. 7.2 Fläche unter einer stückweise stetigen Kurve

Die Diskretisierung ergibt einen approximativen Ansatz zur Flächenberechnung

Wir abstrahieren nun diese Aufgabenstellung indem wir eine (nicht unbedingt stetige aber zumindest stückweise stetige) Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ betrachten (Abb. 7.2):

Um die Fläche A zu bestimmen, bietet sich zunächst ein approximativer Ansatz zur näherungsweisen Bestimmung an. Danach versuchen wir, die Approximation zu verfeinern, um die Fläche schließlich in geeigneter Weise als Grenzwert einer bis zur Unendlichkeit verfeinerten Approximation zu definieren. Die folgenden Schritte beschreiben dieses Verfahren im Detail:

1. Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ für $k = 1, \ldots, n$, wobei $x_0 := a$ und $x_n := b$ gesetzt wird. Für alle weiteren Punkte x_k soll lediglich $x_{k-1} < x_k$ gelten. Es entstehen daher $n + 1$, nicht unbedingt äquidistante Stützstellen x_k mit
$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$
Eine Unterteilung eines (kontinuierlichen) Intervalls in eine endliche Anzahl von Stützstellen, ein sog. Diskretisierungsansatz bzw. eine Diskretisierung, ist ein Standardverfahren in der numerischen Mathematik.
2. Aus jedem Intervall wird eine Stelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ ausgewählt ($k = 1, \ldots, n$).
3. Wir erhalten nun n Rechtecke der Breite $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ und der Höhe $f(\xi_k)$, für deren Flächeninhalt
$$R_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$
gilt.
4. Approximation der gesuchten Fläche A durch die Summe der Flächeninhalte aller n Rechtecke (Abb. 7.3):
$$A \approx \sum_{k=1}^{n} R_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$
5. Verfeinern der Diskretisierung, d. h. Grenzübergang $n \to \infty$, wobei auch gleichzeitig alle Teilintervalllängen gegen 0 gehen sollen. Wir können dies erreichen, indem wir fordern, dass die Maximallängenfolge
$$\delta_n := \max\{\Delta x_k \mid 1 \leq k \leq n\}$$
für steigende Intervallzahl n eine Nullfolge ist. Wenn sich also unabhängig von der Art der Stützpunktwahl bei feiner werdender Diskretierung, d. h. für
$$n \to \infty, \qquad \delta_n \overset{n\to\infty}{\to} 0,$$
ein eindeutiger Grenzwert ergibt, so kann dieser mit dem gesuchten Flächeninhalt A identifiziert werden.

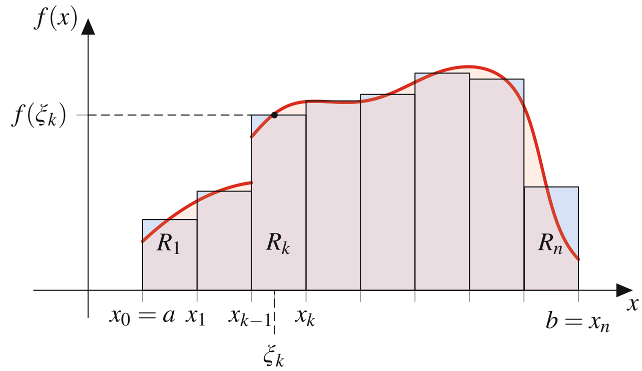

Abb. 7.3 Approximation durch Rechteckflächen

Das Integral wird als Grenzwertprozess definiert

Der Übergang zu einer gegen ∞ gehenden Anzahl von Rechtecken, deren Flächen zu einer Reihe aufsummiert werden und deren Breiten jeweils gegen 0 gehen, stellt letztlich einen Grenzwertprozess mit zwei konkurrierenden Eigenschaften dar. Einerseits gehen die Rechteckbreiten gegen 0, und andererseits summieren wir unendlich viele derartige Rechtecke auf. Wenn dabei unabhängig von der Art der Diskretisierung ein Grenzwert entsteht, so kann dieser als der gesuchte Flächeninhalt unter der Kurve von f interpretiert werden. Wir halten diese Überlegung nun im Rahmen einer genauen Definition fest.

Definition: Riemannsches Integral

Gegeben sei eine (stückweise) stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Falls die Folge
$$I_n := \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$
für alle Diskretisierungen
$$a = x_0 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$$
mit $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $\Delta x_k := x_k - x_{k-1}$ und
$$\delta_n := \max\{\Delta x_k \mid 1 \leq k \leq n\} \overset{n\to\infty}{\to} 0$$

für $n \to \infty$ konvergiert, so heißt f in $[a,b]$ Riemann-integrierbar oder kurz integrierbar. Der Grenzwert

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} I_n \tag{7.1}$$

wird als (riemannsches) Integral über f von a bis b bezeichnet.

Kann es mit dieser Definition passieren, dass unterschiedliche Diskretisierungsfolgen zu unterschiedlichen Grenzwerten führen? Dann wäre der Integralbegriff durch diese Definition nicht eindeutig (nicht wohldefiniert). Da jedoch die Konvergenz *für alle* Diskretisierungen gefordert wird, muss sich stets derselbe Grenzwert einstellen: Wenn man annimmt, dass es zwei Diskretisierungsarten gibt, die zwar jede für sich konvergiert, deren Integralgrenzwerte aber verschieden sind, so könnten wir aus beiden Diskretisierungen eine neue Diskretisierung zusammenbauen, indem wir die einzelnen Stützpunkte der Diskretisierungen in jedem Schritt vereinigen. Diese neue Diskretierung müsste aufgrund der obigen Definition ebenfalls gegen einen Grenzwert konvergieren. Da wir allerdings angenommen haben, dass die Grenzwerte auf Basis der beiden ursprünglichen Diskretisierungen verschieden waren, kann die neue Diskretisierung nicht konvergieren, was im Widerspruch zur geforderten Konvergenz steht. Jede Teilfolge einer konvergenten Folge konvergiert ebenfalls gegen den Folgengrenzwert. Die beiden ursprünglichen Diskretisierungen definieren Teilfolgen der zusammengelegten Diskretisierung. Da die Konvergenz der zusammengelegten Diskretisierung gefordert wurde, zieht das die Konvergenz der Integralgrenzwerte der beiden Diskretisierungsteilfolgen gegen denselben Grenzwert nach sich. Wir müssen also in der Definition nicht zusätzlich einfordern, dass sich stets derselbe Grenzwert ergibt.

Wir betrachten nun einige Eigenschaften des Integrals. Eine unmittelbare Konsequenz der Definition ist die Aussage des folgenden Satzes.

Satz

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion sowie $\xi \in [a,b]$. Die Funktion f ist genau dann in $[a,b]$ integrierbar, wenn f sowohl in $[a,\xi]$ als auch in $[\xi,b]$ integrierbar ist. Dabei lässt sich das Integral aufspalten gemäß

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Die Frage, welche Funktionen integrierbar sind, wird durch den folgenden Satz beantwortet.

Satz: Integrabilitätskriterien

1. Jede stückweise stetige Funktion (und damit auch jede stetige Funktion) ist integrierbar.
2. Jede monotone Funktion ist integrierbar.
3. Integrabilitätskriterium von Lebesgue: Eine Funktion f ist genau dann in einem Intervall $[a,b]$ integrierbar, wenn f dort beschränkt und fast überall (d. h. mit Ausnahme höchstens endlich vieler Stellen aus $[a,b]$) stetig ist. Unstetigkeitsstellen oder isolierte Definitionslücken von f beeinflussen unter dieser Voraussetzung nicht den Wert des Integrals.

Für das Integral gibt es darüber hinaus einige elementare, mit wenig Aufwand nachzuweisende Rechenregeln.

Satz: Eigenschaften des Integrals

Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei integrierbare Funktionen sowie $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante. Dann sind auch $f+g$ und λf integrierbar, und es gilt:

1. *Additivität:* Vertauschbarkeit von Addition und Integration
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. *Homogenität:* Vererbung eines konstanten Faktors auf das Integral
$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
3. *Monotonie des Integrals:* Aus einer Ungleichung $f(x) \le g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ folgt nach Integration ebenfalls
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
4. *Unabhängigkeit von der Bezeichnung der Integrationsvariablen:*
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s = \ldots$$
5. *Vertauschung der Grenzen:*
$$\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x := -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$
Bei Vertauschung der Grenzen spaltet sich also ein Minuszeichen ab.

Die ersten beiden Eigenschaften werden auch als Linearität des Integrals bezeichnet.

Aus der Interpretation des bestimmten Integrals als Fläche unter einer Kurve folgt anschaulich der folgende Sachverhalt.

Mittelwertsatz der Integralrechnung

Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, dann existiert eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot (b - a). \tag{7.2}$$

Das Integral kann also ersatzweise auch als Fläche eines geeignet gewählten Rechtecks (Abb. 7.4) mit der Breite $b-a$ berechnet werden, wenn der Mittelwert $f(\xi)$, den die Funktion f im Intervall $[a, b]$ annimmt, vorliegt.

Dieses Resultat stellt einen Spezialfall des folgenden Satzes dar.

Verallgemeinerter Mittelwertsatz der Integralrechnung

Sind $f, g \in C([a, b])$ zwei auf einem Intervall $[a, b]$ stetige Funktionen mit $g(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$, dann existiert eine Zwischenstelle $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7.3}$$

Der vorausgegangene Mittelwertsatz folgt hieraus durch die Wahl von $g(x) = 1$ für alle $x \in [a, b]$.

Beweis Die Aussage des verallgemeinerten Mittelwertsatzes der Integralrechnung folgt im Wesentlichen aus dem Zwischenwertsatz. Da f eine stetige Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ ist, ist f und damit ihre Wertemenge auf diesem Intervall beschränkt. Es sei nun $k = \inf f([a, b])$ das Infimum und $K = \sup f[a, b]$ das Supremum von f auf $[a, b]$. Dann ist für alle $k \leq f(x) \leq K$ für alle $x \in [a, b]$. Da $g(x)$ nichtnegativ in $[a, b]$ ist, folgt hieraus $kg(x) \leq f(x)g(x) \leq Kg(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Dann gilt aufgrund der Monotonie des Integrals

$$\int_a^b k \cdot g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b K \cdot g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wir können nun beide Konstanten k und K als Faktoren vor die Integrale ziehen und erhalten die Abschätzung

$$k \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq K \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nun ist $k \leq K$, daher gibt es ein $m \in [k, K]$, sodass

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Da f stetig ist und $k \leq m \leq K$ gilt, existiert aufgrund des Zwischenwertsatzes eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = m$. Für diese Stelle gilt also

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi) \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \blacksquare$$

Leider ist jedoch der Mittelwert einer Funktion in einem bestimmten Intervall in der Regel nicht einfach zu bestimmen. Somit hat der Mittelwertsatz eher eine theoretische Bedeutung, wie wir noch sehen werden. Umgekehrt können wir jedoch den Mittelwert $\bar{f}$ einer Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ mithilfe des Integrals definieren:

$$\bar{f} := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ein bestimmtes Integral hat also eine über eine reine Flächenberechnung hinausgehende Bedeutung. In der Praxis wird ein Integral nicht über die in seiner Definition skizzierte Grenzwertbestimmung berechnet. Wir suchen nach praktikableren Methoden. Hilfreich sind hierbei die Erkenntnisse des folgenden Abschnitts.

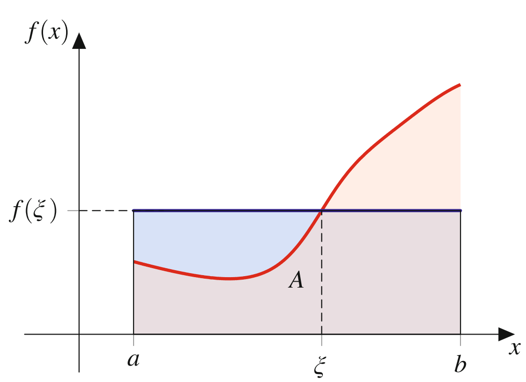

Abb. 7.4 Die Aussage des Mittelwertsatzes der Integralrechnung

7.2 Das unbestimmte Integral

Die folgende Feststellung ist die Grundlage für die Berechnung des Integrals.

Satz

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $x \in [a, b]$. Die Funktion

$$\Phi : [a, b] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \Phi(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

ist differenzierbar, und es gilt für ihre Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi(x) = f(x).$$

Generell heißt jede differenzierbare Funktion F, deren Ableitung f ergibt, eine **Stammfunktion** von f. Die Funktion Φ in der obigen Definition ist also eine Stammfunktion von f.

Beweis Wir betrachten den Differenzenquotienten

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h}$$

und untersuchen ihn für den Grenzübergang $h \to 0$, um die Ableitung von Φ an der Stelle x zu bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} &= \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\left(\Phi(x+h) - \Phi(x)\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{h}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechung existiert nun ein $\xi_h \in [x, x+h]$, sodass wir das letzte Integral über eine Rechteckfläche berechnen können. Damit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} &= \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{h}f(\xi_h)\cdot(x+h-x) = \frac{1}{h}f(\xi_h)\cdot h = f(\xi_h).\end{aligned}$$

Für $h \to 0$ gilt $\xi_h \to x$, da $\xi_h \in [x, x+h]$. Wenn wir also in der letzten Gleichung den Grenzübergang für $h \to 0$ betrachten, so ergibt sich links die Ableitung der Funktion Φ an der Stelle x und rechts der Wert ihrer Ableitung:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0}\frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x). \quad \blacksquare$$

Stammfunktionen einer Funktion f sind nicht eindeutig bestimmt. Da eine additive Konstante $c \in \mathbb{R}$ für eine Stammfunktion F von f beim Ableiten verschwindet,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x) + c) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}c = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F = F'(x) = f(x),$$

ist mit F auch die durch $F(x) + c$ definierte Funktion eine Stammfunktion von f. Umgekehrt unterscheiden sich zwei Stammfunktionen F und G einer Funktion f ausschließlich durch eine additive Konstante, denn für die Differenzfunktion $F - G$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F(x) - G(x)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Dies bedeutet, dass die Differenz zweier Stammfunktionen eine verschwindende Ableitung besitzt und damit konstant ist. Es gibt also eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x) - G(x) = c.$$

Die beiden Stammfunktionen unterscheiden sich damit nur um eine additive Konstante. Es ist in der Praxis nicht immer unmittelbar einzusehen, dass sich zwei Stammfunktionen nur um eine additive Konstante unterscheiden. Beispielsweise haben die beiden unterschiedlichen Funktionen $F(x) = \sin^2 x$ und $G(x) = -\cos^2 x$ dieselbe Ableitung:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^2 x = 2\sin(x)\cos(x),\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}G(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\cos^2 x\right) = 2\cos(x)\sin(x).\end{aligned}$$

Sie sind also beide Stammfunktionen von $f(x) = 2\sin x\cos x$. Wie aber lautet die additive Konstante, die beispielsweise aus der Funktion G die Funktion F macht? Hierzu beachten wir, dass $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ gilt. Damit folgt

$$F(x) = \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 + G(x).$$

Die gesuchte additive Konstante (aus der Sicht von G) ist also die Zahl 1.

Es kommt nicht auf die Wahl der Stammfunktion an

Wir kommen nun zum zentralen Satz dieses Kapitels.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist für **jede** Stammfunktion F von f

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Für die rechts stehende Differenz ist die Schreibweise

$$[F(x)]_a^b := F(b) - F(a) \quad \text{bzw.} \quad F(x)|_a^b := F(b) - F(a)$$

sehr zweckmäßig.

Für die Berechnung des bestimmten Integrals kommt es also nicht auf die spezielle Wahl einer Stammfunktion von f an, da sich nämlich sämtliche Stammfunktionen von ein und derselben Funktion f nur um eine additive Konstante unterscheiden können. Umgekehrt ist mit F auch $F+c$ mit $c \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zur selben Funktion f.

Beweis Nach dem vorletzten Satz ist

$$\Phi(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

eine Stammfunktion von f. Aufgrund der Definition von Φ gilt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b).$$

Ist nun $F(x)$ eine weitere Stammfunktion von $f(x)$, so gilt $\Phi(x) = F(x) + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$ und daher

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) &= \Phi(b) - 0\\ &= \Phi(b) - \Phi(a)\\ &= F(b) + c - (F(a) + c)\\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Zur Berechnung eines Integrals ist also die Bestimmung einer Stammfunktion von zentraler Bedeutung. Wir widmen uns nun daher dieser Aufgabe systematisch.

Definition: Unbestimmtes Integral

Ist F eine Stammfunktion von f, gilt also $F'(x) = f(x)$, so wird mit

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + \mathbb{R}$$

die Menge aller Stammfunktionen von f bezüglich der Variablen x bezeichnet. Das ohne Ober- und Untergrenze geschriebene Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ wird auch als unbestimmtes Integral von f bezeichnet, während die Funktion f Integrand heißt. In der Praxis wird die Menge aller Stammfunktionen von f durch die Auswahl einer beliebigen Stammfunktion repräsentiert, sodass sich die Schreibweise

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

durchgesetzt hat. Diese Notation ist aber nicht unproblematisch, da es sich bei $F(x) + c$ nicht um die Menge aller Stammfunktionen von f handelt, sondern nur um eine Stammfunktion.

Die Mengenschreibweise $F(x) + \mathbb{R}$ ist dagegen unabhängig von der Auswahl einer sie repäsentierenden Stammfunktion F. Sind sowohl F als auch G zwei Stammfunktionen der Funktion f, so ändert sich die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f nicht, wenn in der Bezeichnung $F(x) + \mathbb{R}$ die Stammfunktion F gegen G ausgetauscht wird:

$$F(x) + \mathbb{R} = G(x) + \mathbb{R}.$$

Um dies zu verdeutlichen, betrachten wir das folgende Beispiel. Für die beiden unterschiedlichen Stammfunktionen $F(x) = \sin^2 x$ und $G(x) = -\cos^2 x$ der Funktion $f(x) = 2\sin x \cos x$ gilt

$$\int 2\sin x \cos x\,\mathrm{d}x = \sin^2 x + \mathbb{R} = -\cos^2 x + \mathbb{R},$$

denn es ist $-\cos^2 x = \sin^2 x - 1$ und damit $-\cos^2 x + \mathbb{R} = \sin^2 x - 1 + \mathbb{R} = \sin^2 x + \mathbb{R}$. Wir beachten hierbei, dass die Menge $c + \mathbb{R} = \{c + r \mid r \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$ ist, unabhängig von der Wahl der Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Die Schreibweise mit der hinzuaddierten Menge $\mathbb{R}$ aller Konstanten wird der Definition des unbestimmten Integrals als Menge aller Stammfunktionen gerecht. Würden wir den Zusatz $+\mathbb{R}$ einfach weglassen, so könnten sich Widersprüche ergeben. Beispielsweise sind sowohl die Funktion x^2 als auch $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$ Stammfunktionen von $2x$. Würden wir nun einfach

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 \quad \text{und} \quad \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 - 4,$$

schreiben, so könnte man formal

$$x^2 = x^2 - 4,$$

folgern, was definitiv falsch ist. Hingegen gilt

$$x^2 + \mathbb{R} = \int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 - 4 + \mathbb{R}.$$

Die Schreibweise $F(x) + \mathbb{R}$ besagt, dass bezüglich einer Funktion f eine ganze Klasse von Funktionen als „Stammfunktion" betrachtet wird. Man spricht dabei, wie in der Algebra üblich, von einer Äquivalenzklasse modulo $\mathbb{R}$. Auf die Wahl des Repräsentanten $F(x)$ dieser Klasse kommt es dabei nicht an. Nichtsdestotrotz hat sich die Schreibweise mit additiver reeller Konstante c

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Teil II

durchgesetzt. Wir können diese Beziehung auch so lesen, dass einfach nur

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x)$$

gilt.

Beispiele unbestimmter Integrale

1. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq -1$ ist

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c.$$

2. Hieraus ergibt sich speziell für $n = 1, 2, -2$

$$\int x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 + c,$$

$$\int x^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^3 + c,$$

$$\int \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x = \int x^{-2} \, \mathrm{d}x = -x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c.$$

3. Wegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x = \frac{1}{x}$ gilt für $x > 0$

$$\int x^{-1} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln(x) + c.$$

4. Da sich die Exponentialfunktion beim Ableiten reproduziert, folgt

$$\int \exp(x) \, \mathrm{d}x = \exp(x) + c.$$

5. Für die Sinus- bzw. Kosinusfunktion gilt

$$\int \cos(x) \, \mathrm{d}x = \sin(x) + c,$$

$$\int \sin(x) \, \mathrm{d}x = -\cos(x) + c.$$

6. Für den Tangens gilt mit $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$

$$\int \tan x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c,$$

denn $\ln|\cos x| + c$ ist für alle $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$ differenzierbar, und es gilt aufgrund der Kettenregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(-\ln|\cos x| + c) = -\frac{1}{\cos x}(-\sin x) = \tan x.$$

Bei diesen Beispielen ist jeweils $c \in \mathbb{R}$ eine beliebige additive Konstante. ◀

Die Bestimmung einer Stammfunktion kann gelegentlich aber auch sehr schwer bzw. sogar unmöglich sein. Beispielsweise hat die in der Statistik vielfach verwendete Funktion $\exp(-x^2)$ eine Stammfunktion, die sich aber nicht als Term elementarer Funktionen schreiben lässt. Ein weiteres Beispiel ist die Funktion $\frac{\sin x}{x}$. Um dennoch bestimmte Integrale bei derartigen Funktionen zu berechnen, werden geeignete Näherungsverfahren verwendet.

Im folgenden Abschnitt beschäftigen wir uns mit grundlegenden Methoden zur Bestimmung von Stammfunktionen.

7.3 Elementare Regeln zur Integration

Als eine Art „Umkehrung der Kettenregel" kann die Substitutionsregel aufgefasst werden.

Satz: Substitutionsregel

Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und $g : [a, b] \to I$ eine auf dem Intervall $[a, b]$ differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung („stetig differenzierbar"). Dann gilt

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, \mathrm{d}t.$$

Hilfreich ist die Darstellung dieser Regel als Kürzungsregel unter Verwendung der Schreibweise mit Differenzialen:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) \, \mathrm{d}x &= \int_a^b f(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b f(g(x)) \, \mathrm{d}g(x) = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Im Schritt vom zweiten auf den dritten Term wird das Differenzial $\mathrm{d}x$ aus dem Ausdruck „herausgekürzt", wodurch mit $g(x)$ eine neue Integrationsvariable in Erscheinung tritt. Die ursprüngliche Variable x durchläuft den Integrationsbereich von a bis b. Eingesetzt in g ergibt dies dann einen Durchlauf der neuen Integrationsvariablen $g(x)$ von $g(a)$ bis $g(b)$. Bei der Anwendung dieser Regel kann die innere Funktion $g(x)$, deren Ableitung als äußerer Faktor $g'(x)$ im Integranden auftritt, formal gegen eine neue Integrationsvariable $t := g(x)$ ersetzt (substituiert) werden. Hierbei ist zu beachten, dass die Ober- und Untergrenze entsprechend angepasst werden und daher gegen $g(a)$ und $g(b)$ ausgetauscht werden müssen. Diese Grenzanpassung entfällt, wenn die Regel ohne explizite Subsitution verwendet wird.

Die Substitutionsregel kann auch für unbestimmte Integrale verwendet werden. Anwendbar ist also diese Regel, wenn die Ableitung $g'(x)$ einer inneren Funktion $g(x)$ multiplikativ im Integranden auftaucht. Um die Anwendung der Substitutionsregel zu trainieren, betrachten wir einige Beispiele jeweils unter konsequenter Verwendung der Form als Kürzungsregel und alternativ mit expliziter Substitution der Integrationsvariablen. Wir beachten dabei, dass bei expliziter Substitution eine Grenzanpassung erfolgen muss, sofern ein bestimmtes Integral vorliegt.

Beispiele zur Integration per Substitution

1.
$$\int_2^3 \exp(x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \exp(x^2)\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_2^3 \exp(x^2)\,\mathrm{d}x^2 = [\exp(x^2)]_2^3 = \mathrm{e}^9 - \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^4(\mathrm{e}^5-1)$$

Alternativ: $t = g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$, $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$$\int_2^3 \exp(x^2)\cdot 2x\,\mathrm{d}x = \int_4^9 \exp(t)\,\mathrm{d}t = [\exp(t)]_4^9 = \mathrm{e}^9 - \mathrm{e}^4 = \mathrm{e}^4(\mathrm{e}^5-1)$$

2.
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{\mathrm{d}\sin x}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}\sin x = [\ln\sin x]_{\pi/4}^{\pi/2} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$$

Hierbei beachten wir, dass

$$\frac{\mathrm{d}\ln\sin x}{\mathrm{d}\sin x} = \frac{1}{\sin x}$$

gilt, während

$$\frac{\mathrm{d}\ln\sin x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x$$

ist.
Alternativ: $t = g(x) = \sin x$, $g'(x) = \cos x$, $\cos x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\,\mathrm{d}x = \int_{1/\sqrt{2}}^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = [\ln t]_{1/\sqrt{2}}^{1} = \ln 1 - \ln\frac{1}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}$$

3.
$$\int \left(1-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int\left(1-\frac{1}{x}\right)^2\mathrm{d}\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 + c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Alternativ: $t = g(x) = 1-\frac{1}{x}$, $g'(x) = \frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$

$$\int \left(1-\frac{1}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^3 + \mathbb{R} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{x}\right)^3 + c,\quad c\in\mathbb{R}$$

Hier ist am Ende der Rechnung eine Resubstitution erforderlich. ◀

Bei der Anwendung der Substitutionsregel liegt der Integrand in einer Form vor, die dem Resultat einer Kettenregel entspricht. In eine äußere Funktion wird eine innere Funktion eingesetzt, die in abgeleiteter Form als innere Ableitung mit der äußeren Funktion multipliziert wird.

Die Substitutionsregel ist die umgekehrt angewandte Kettenregel

Es ist manchmal nicht leicht, die Anwendbarkeit der Substitutionsregel direkt zu erkennen, da die multiplikative innere Ableitung nicht immer direkt ersichtlich ist. Hin und wieder ist es zweckmäßig, den Integranden etwas „umzubauen" mit dem Ziel, eine multiplikative innere Ableitung zu erzeugen. Die folgenden Beispiele zeigen, wie dies in der Praxis gelingen kann.

Beispiele zur Termanpassung bei Substitution

1. *Erweitern mit innerer Ableitung:*

$$\int(\sqrt{x}+1)^2\,\mathrm{d}x = \int(\sqrt{x}+1)^2\cdot 2\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int(\sqrt{x}+1)^2\cdot 2\sqrt{x}\cdot\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int(\sqrt{x}+1)^2\cdot 2\sqrt{x}\,\mathrm{d}\sqrt{x} = \int(2\sqrt{x}^3+4\sqrt{x}^2+2\sqrt{x})\,\mathrm{d}\sqrt{x} = \frac{2}{4}\sqrt{x}^4+\frac{4}{3}\sqrt{x}^3+\sqrt{x}^2+c$$

Teil II

Teil II

$$= \frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}\sqrt{x}^3 + x + c,$$

wobei $x > 0$ sei.

2. *Verwendung der Umkehrfunktion:*

$$\begin{aligned}
&\int (x+1)(x+\ln x)^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int (\mathrm{e}^{\ln x}+1)(\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x)^2\,\mathrm{d}\ln x \\
&= \int (\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x)^2\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x) \\
&= \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x)^3 + c \\
&= \frac{1}{3}(x+\ln x)^3 + c,
\end{aligned}$$

mit $x > 0$.
Beim Übergang vom zweiten zum dritten Ausdruck beachten wir, dass

$$\mathrm{e}^{\ln x} + 1 = \frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{\ln x} + \ln x)}{\mathrm{d}\ln x}.$$

Die Substitution der inneren Funktion durch eine neue Variable macht die Integration bei diesem Beispiel etwas übersichtlicher. Obwohl die Schritte prinzipiell identisch sind, rechnen wir zum Vergleich das letzte Beispiel noch einmal mit expliziter Subsitution durch:

$$\int (x+1)(x+\ln x)^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^{\ln x}+1)(\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x)^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Wir erkennen in dem Faktor $\frac{1}{x}$ die Ableitung der inneren Funktion $\ln x$ und setzen

$$t := \ln x \Rightarrow \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \Rightarrow \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Es ergibt sich hiermit ein Integral mit neuer Integrationsvariable t:

$$\int (x+1)(x+\ln x)^2 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^t+t)^2\,\mathrm{d}t$$

Wir setzen nun

$$s := \mathrm{e}^t + t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \mathrm{e}^t + 1 \Rightarrow \mathrm{d}s = (\mathrm{e}^t+1)\,\mathrm{d}t.$$

in das letzte Integral ein und erhalten schließlich

$$\begin{aligned}
\int (\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^t+t)^2\,\mathrm{d}t &= \int (\mathrm{e}^t+t)^2(\mathrm{e}^t+1)\,\mathrm{d}t \\
&= \int s^2\,\mathrm{d}s = \frac{1}{3}s^3 + c.
\end{aligned}$$

Nun machen wir die Substitutionen wieder rückgängig:

$$\frac{1}{3}s^3 + c = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^t+t)^3 + c = \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x)^3 + c.$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}
\int (x+1)(x+\ln x)^2\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}(\mathrm{e}^{\ln x}+\ln x)^3 + c \\
&= \frac{1}{3}(x+\ln x)^3 + c.
\end{aligned}$$

Bei beiden Beispielen ist $c \in \mathbb{R}$. ◀

Eine weitere elementare Integrationsregel ergibt sich aus der Produktregel. Für zwei differenzierbare Funktionen f und g ist das Produkt fg ebenfalls differenzierbar, und es gilt nach der Produktregel

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

bzw. umgestellt nach $f(x)g'(x)$

$$f(x)g'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)g(x)) - f'(x)g(x).$$

Wenn wir nun beide Seiten von a bis b integrieren, ergibt sich

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Satz: Partielle Integration

Es seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x \qquad (7.4)$$

bzw. in kürzerer Form und als unbestimmtes Integral formuliert

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x).$$

Zunächst stellt sich aus Sicht der Praxis die Frage, welchen Vorteil das Anwenden dieser Regel für die Integration hat. Schließlich muss auf der rechten Seite von Gl. (7.4) wieder ein Integral bestimmt werden. Die Hoffnung ist allerdings, dass dieses neue Integral leichter zu handhaben ist als das ursprüngliche Integral.

Beispiele zur partiellen Integration

1. Der Integrand von

$$\int_0^{\pi} x \cos x \,\mathrm{d}x$$

besteht aus den beiden Faktoren x und $\cos x$. Die Regel zur partiellen Integration sieht nun vor, dass wir einen dieser beiden Faktoren im Laufe des Verfahrens ableiten müssen, während für den anderen Faktor eine Stammfunktion gefunden werden muss. Für beide Faktoren können wir eine Stammfunktion angeben. Da aber das neue Integral auf der rechten Seite nach Anwendung der partiellen Integration einfacher zu bestimmen sein soll als das ursprüngliche Integral, bietet es sich an, den Faktor x für das Ableiten vorzusehen (entspricht in der obigen Regel der Funktion $f(x)$), während für den Faktor $\cos x$ (entspricht der Funktion $g'(x)$) eine Stammfunktion, beispielsweise $\sin x$ (entspricht $g(x)$), bestimmt und verwendet werden muss. Damit wir leichter den Überblick darüber behalten, welche Funktion wir für das Ableiten und welche für die Stammfunktionsbestimmung ausgesucht haben, sind in diesem und in den folgenden Beispielen die beiden Funktionen durch $\downarrow$ für das Ableiten und $\uparrow$ für die Stammfunktionssuche markiert. Im Detail gehen wir also wie folgt vor:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \underset{\downarrow}{x} \underset{\uparrow}{\cos x} \,\mathrm{d}x &= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \cdot 1 \,\mathrm{d}x \\ &= [x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= [x \sin x]_0^{\pi} + [\cos x]_0^{\pi} \\ &= \pi \cdot \sin \pi - 0 \cdot \sin 0 + \cos \pi - \cos 0 \\ &= -2.\end{aligned}$$

2. Gelegentlich ist es hilfreich, einen zweiten Faktor zu „erzeugen":

$$\begin{aligned}\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int \underset{\uparrow}{1} \cdot \underset{\downarrow}{\ln x} \,\mathrm{d}x &= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x \\ &= x \ln x - \int \mathrm{d}x \\ &= x \ln x - x + \mathbb{R} = (\ln x - 1)x + c.\end{aligned}$$

3. Hin und wieder müssen wir die partielle Integration mehrfach anwenden:

$$\begin{aligned}\int \underset{\downarrow}{x^2} \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x &= x^2 \mathrm{e}^x - \int \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^x} \cdot \underset{\downarrow}{2x} \,\mathrm{d}x \\ &= x^2 \mathrm{e}^x - \left(2x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x \cdot 2 \,\mathrm{d}x\right) \\ &= x^2 \mathrm{e}^x - 2x \cdot \mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^x + c \\ &= (x^2 - 2x + 2)\mathrm{e}^x + c.\end{aligned}$$

4. Oftmals erhalten wir nach wiederholter Anwendung der partiellen Integration das Ausgangsintegral wieder zurück:

$$\begin{aligned}\int \underset{\downarrow}{\sin x} \cdot \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^x} \,\mathrm{d}x &= \sin x \cdot \mathrm{e}^x - \int \underset{\uparrow}{\mathrm{e}^x} \underset{\downarrow}{\cos x} \,\mathrm{d}x \\ &= \sin x \cdot \mathrm{e}^x \\ &\quad -\left(\cos x \cdot \mathrm{e}^x - \int \mathrm{e}^x(-\sin x) \,\mathrm{d}x\right) \\ &= \sin x \cdot \mathrm{e}^x - \cos x \cdot \mathrm{e}^x - \int \sin x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Das zu bestimmende Integral $\int \sin x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x$ erscheint rechts wieder. Aus diesem Dilemma entkommen wir (glücklicherweise wegen des Minuszeichens vor dem rechts stehenden Integral), indem wir das gesuchte Integral auf beiden Seiten dieser Gleichung addieren. Wir erhalten dann

$$2 \int \sin x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \sin x \cdot \mathrm{e}^x - \cos x \cdot \mathrm{e}^x,$$

woraus sich für das gesuchte Integral

$$\int \sin x \cdot \mathrm{e}^x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) \cdot \mathrm{e}^x + c$$

ergibt.

5. Die Wahl einer ganz bestimmten Stammfunktion für einen der beiden Faktoren kann eine partielle Integration gelegentlich wesentlich erleichtern. So ergibt der Ansatz

$$\int \underset{\uparrow}{2x} \cdot \underset{\downarrow}{\arctan x} \,\mathrm{d}x = \arctan x \cdot x^2 - \int x^2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$$

aufgrund des verbleibenden Integrals eine schwierigere Situation als der Ansatz mit der alternativen Stammfunktion $x^2 + 1$ für den Faktor $2x$:

$$\begin{aligned}&\int \underset{\uparrow}{2x} \cdot \underset{\downarrow}{\arctan x} \,\mathrm{d}x \\ &= \arctan x \cdot (x^2+1) - \int (x^2+1) \cdot \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \arctan x \cdot (x^2+1) - \int \mathrm{d}x \\ &= \arctan x \cdot (x^2+1) - x + c.\end{aligned}$$

Bei allen unbestimmten Integralen ist jeweils $c \in \mathbb{R}$. ◄

Um auf eine weitere Standardsituation bei Integralen vorzubereiten, betrachten wir die für $x \neq 0$ definierte Funktion $\ln|x|$. Diese Funktion ist auf ihrem gesamten Definitionsbereich, also auf $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, differenzierbar, und es gilt für ihre Ableitung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln|x| = \frac{1}{x}.$$

Hieraus ergibt sich als Integral über die Kehrwertfunktion

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

für $x \neq 0$.

Dies ist die Grundlage für eine gelegentlich auftretende Standardsituation.

Satz: Logarithmische Integration

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine eine stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) \neq 0$ für $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = [\ln|f(x)|]_a^b = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|$$

bzw. als unbestimmtes Integral

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Wir können dies sehr schnell begründen: Es gilt

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}f(x) = [\ln|f(x)|]_a^b$$
$$= \ln|f(b)| - \ln|f(a)| = \ln\left|\frac{f(b)}{f(a)}\right|.$$

Anwendbar ist diese Regel also in Situationen, in denen der Integrand einen Quotienten darstellt, dessen Nenner eine nullstellenfreie Funktion ist, deren Ableitung im Zähler steht.

Beispiele zur logarithmischen Integration

1. Bei dem Integranden von

$$\int_0^1 \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x$$

handelt es sich um einen gebrochenrationalen Ausdruck. Das Zählerpolynom ist die Ableitung des Nennerpolynoms. Der Nenner ist stets positiv, insbesondere nullstellenfrei und auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar. Aufgrund des vorangegangenen Satzes gilt daher

$$\int_0^1 \frac{4x^3 + 2x}{x^4 + x^2 + 1}\,\mathrm{d}x = \ln\left|\frac{3}{1}\right| = \ln 3.$$

2. Der Kotangens $\cot x$ ist das Verhältnis von Kosinus zu Sinus, also der Kehrwert des Tangens. Da der Kosinus die Sinusableitung ist, folgt aufgrund des letzten Satzes

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + c$$

für alle $\in \mathbb{R}$, die nicht Nullstelle des Sinus sind, also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \pi\mathbb{Z}$.

3. Manchmal muss der Integrand erst etwas „umgebaut" werden, bevor der letzte Satz angewendet werden kann:

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + c$$

für alle Nichtnullstellen des Kosinus, also für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \notin \frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}$.

4. Gelegentlich ist auch eine Partialbruchzerlegung hilfreich: Zur Bestimmung von

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$$

zerlegen wir den Integranden in Partialbrüche

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} \qquad | \cdot x(x+1)$$
$$\iff \qquad 1 = A(x+1) + Bx.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Nennernullstelle $x = 0$ ein, so folgt $1 = A$. Das Einsetzen der zweiten Nennernullstelle $x = -1$ liefert $1 = -B$ bzw. $B = -1$. Damit folgt nun für das Integral

$$\int \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x$$
$$= \ln|x| - \ln|x+1| + \mathbb{R}$$
$$= \ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + c.$$

Bei allen unbestimmten Integralen ist $c \in \mathbb{R}$. ◀

In Tab. 7.1 sind Stammfunktionen für einige elementare Funktionen aufgeführt.

Tab. 7.1 Stammfunktionen elementarer Funktionen

$f(x)$	$\int f(x)\,\mathrm{d}x$	Bedingung
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$n \in \mathbb{Z}, n \neq -1$
$\frac{1}{x}=x^{-1}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}=x^{1/2}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c$	$x>0$
$\exp x$	$\exp x + c$	
$\ln x$	$x\ln x - x + c$	$x>0$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}+c$	$a>0$
$\log_a x$	$\frac{x\ln x - x}{\ln a}+c$	$x, a > 0$
$\sin x$	$-\cos x + c$	
$\cos x$	$\sin x + c$	
$\tan x$	$-\ln\cos x + c$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\sinh x$	$\cosh x + c$	
$\cosh x$	$\sinh x + c$	
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$	$\lvert x\rvert < 1$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x + c$	$\lvert x\rvert < 1$

7.4 Rotationskörper

Durch das einführende Beispiel am Anfang dieses Kapitels ist uns bereits klar, dass die Integralrechnung nicht allein zur Flächenberechnung unter Kurven dient. Ein ebenfalls mithilfe der Integralrechnung lösbares Problem ist die Berechnung des Volumens und der Mantelfläche eines Rotationskörpers (Abb. 7.5). Hier wird ein achsensysymmetrischer Körper durch eine stetige Berandungsfunktion f beschrieben, deren Graph um 360° um die x-Achse gedreht wird. Wir interessieren uns für zwei Fragestellungen:

- Welchen Rauminhalt nimmt der Rotationskörper ein?
- Welchen Flächeninhalt besitzt die Oberfläche des Rotationskörpers ohne die beiden seitlichen Kreisflächen? Wir bezeichnen diese Fläche als Mantelfläche.

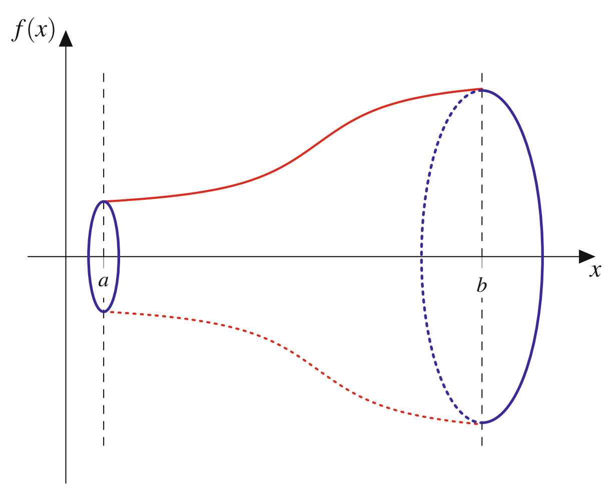

Abb. 7.5 Ein durch die Berandungsfunktion f definierter Rotationskörper

Bei einer konstanten Berandungsfunktion $f(x) = R$ für $x \in [a,b]$ entsteht ein Zylinder der Länge $b-a$ mit Radius R. In diesem Fall sind die beiden Fragen sehr leicht zu beantworten. Während die Mantelfläche des Zylinders $M = 2\pi R(b-a)$ beträgt, ist sein Volumen durch $V = \pi R^2(b-a)$ gegeben. Wenn wir uns zunächst der Aufgabe stellen, das Volumen eines beliebigen, durch eine stetige Berandungsfunktion f in einem Intervall $[a,b]$ definierten Rotationskörpers zu berechnen, so ist ähnlich wie bei der zu Beginn dieses Kapitels behandelten Flächenberechnung ein Diskretisierungsansatz hilfreich. Hierzu zerlegen wir gedanklich den Rotationskörper in n Zylinder (Abb. 7.6) und approximieren das gesuchte Volumen durch die Summe der Volumina der einzelnen Zylinder. Ähnlich wie bei der Flächenberechnung unter Kurven verfeinern wir dann die Diskretisierung gedanklich. Schließlich führen wir einen Grenzübergang durch ($n \to \infty$, Zylinderlängen $\to 0$, $\sum \to \int$). Das Ziel ist also die Berechnung des gesuchten Volumens durch ein riemannsches Integral. Wir haben es daher mit unendlich vielen, unendlich kurzen (infinitesimal kleinen) Zylindern zu tun. Wir betrachten zunächst einen derartigen infinitesimal kleinen Einzelzylinder an einer Stelle $x \in [a,b]$. Dieser Einzelzylinder besitzt die (infinitesimal kleine) Länge $\mathrm{d}x$ und den Radius $f(x)$ (Abb. 7.6). Somit gilt für das (infinitesimal kleine) Volumen dieses Einzelzylinders

$$\mathrm{d}V = \pi(f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Die Integration dieser Gleichung auf beiden Seiten ergibt das gesuchte Volumen des gesamten Rotationskörpers:

$$V = \int \mathrm{d}V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Volumen eines Rotationskörpers

Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Berandungsfunktion. Für das Volumen des durch f definierten Rotationskörpers gilt

$$V = \int \mathrm{d}V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei ist das Vorzeichen von f unerheblich. Eine Berandungsfunktion darf auch negativ sein, auf den Rotationskörper hat dies keinen Einfluss. In dem Integranden des Volumenintegrals wird f ohnehin quadriert. Als Beispiel für die Anwendung dieses Satzes wollen wir eine Formel zur Berechnung des Volumens eines Kegels mit Grundflächenradius R und Höhe bzw. Länge h ermitteln (Abb. 7.7). Die Berandungsfunktion ist eine Gerade durch den Nullpunkt mit der Steigung R/h:

$$f : [0,h] \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{R}{h}x.$$

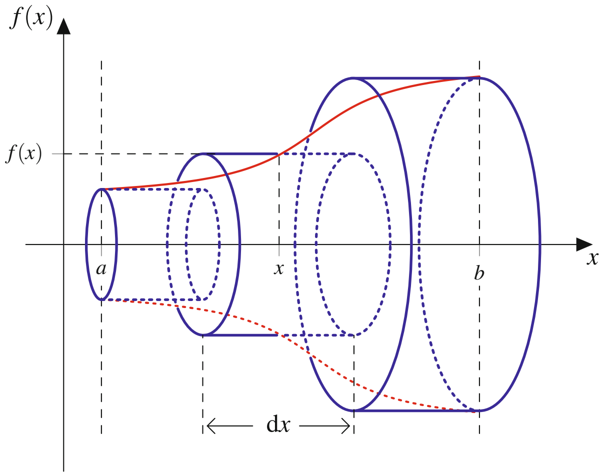

Abb. 7.6 Die approximative Zerlegung des Rotationskörpers in einzelne Zylinder

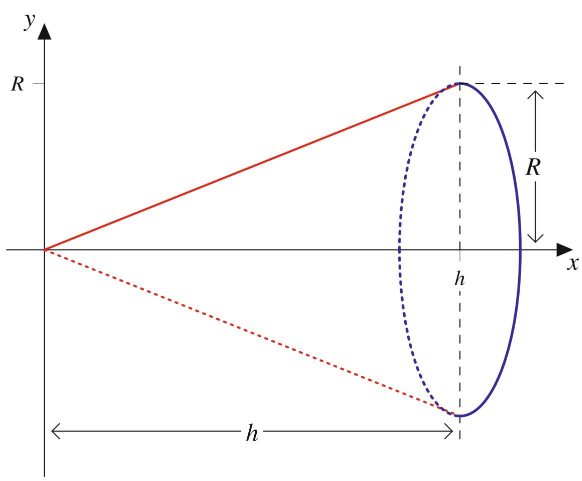

Abb. 7.7 Kegel mit Grundflächenradius R und Länge h

Nach dem vorausgegangenen Satz gilt für das Kegelvolumen

$$V = \pi \int_0^h (f(x))^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \int_0^h x^2 \,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{R^2}{h^2} \cdot \frac{1}{3} [x^3]_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h.$$

Um die Mantelfläche des Rotationskörpers zu berechnen, können wir einen ähnlichen Diskretisierungsansatz wählen. Allerdings dürfen wir dabei nicht die Oberflächen der Einzelzylinder betrachten, da sie bei noch so feiner Diskretisierung auch im infinitesimal kleinen Fall durch den im Allgemeinen nicht horizontalen Verlauf der Berandungsfunktion stets mit einem Fehler behaftet sind. Bei der Verwendung von Kegelabschnitten statt Zylinder kann dieser Effekt vermieden werden. Die Mantelfläche eines Kegels mit dem Grundflächenradius R und Höhe h ist durch $\pi R\sqrt{R^2 + h^2}$ gegeben. Die Mantelfläche eines Kegelabschnitts mit Kleinradius r, Großradius R und Höhe h ergibt sich daher nach einiger Rechung als

$$M = \pi(r + R)\sqrt{h^2 + (R - r)^2}.$$

Dies können wir für einen infinitesimalen Kegelabschnitt an der Stelle x mit der Länge $h = \mathrm{d}x$, dem Kleinradius $r = f(x)$ und dem Großradius $R = f(x) + \mathrm{d}f(x)$ formulieren:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}M &= \pi(f(x) + f(x + \mathrm{d}x))\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (f(x) + \mathrm{d}f(x) - f(x))^2} \\
&= \pi(f(x) + f(x + \mathrm{d}x))\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}f(x))^2} \\
&= \pi(f(x) + f(x + \mathrm{d}x))\sqrt{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)(\mathrm{d}x)^2} \\
&= \pi(f(x) + f(x + \mathrm{d}x))\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir beachten, dass die Differenziale für Grenzwertprozesse stehen, deren Grenzwerte wir nun kennen. Es ist somit

$$f(x) + f(x + \mathrm{d}x) = 2f(x), \qquad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x),$$

woraus sich

$$\mathrm{d}M = 2f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

ergibt.

Die Integration auf beiden Seiten der Gleichung ergibt die gesuchte Mantelfläche:

$$\begin{aligned}
M = \int \mathrm{d}M &= \pi \int_a^b 2f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Wir benötigen also die Differenzierbarkeit der Berandungsfunktion. Um sicherzustellen, dass die Mantelfläche unabhängig vom Vorzeichen der Berandungsfunktion nichtnegativ wird, setzen wir den Faktor $f(x)$ im Integranden in Betragsstriche.

Mantelfläche eines Rotationskörpers

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Berandungsfunktion. Für die Mantelfläche des durch f definierten Rotationskörpers gilt

$$M = 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{7.5}$$

7.5 Bogenlänge einer Kurve

Mithilfe der Integralrechnung steht uns ein Instrument zur Verfügung, die Bogenlänge einer durch eine differenzierbare Funktion definierten Kurve zu berechnen. Abb. 7.8 zeigt den Graphen einer differenzierbaren Funktion in einem Intervall $[a, b]$. Uns interessiert die Länge dieser Kurve. Wie in der Abbildung angedeutet, versuchen wir durch einen infinitesimalen Linienzug $\mathrm{d}L$ ein infinitesimales Bogenstück an der Stelle x zu approximieren, um anschließend über die Integration zur Gesamtlänge L dieser Kurve zu gelangen. Nach dem Satz des Pythagoras gilt für $\mathrm{d}L$

$$\mathrm{d}L = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}f(x))^2}.$$

Nach Integration beider Seiten erhalten wir

$$L = \int \mathrm{d}L = \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}f(x))^2}.$$

Bei dem rechts stehenden Ausdruck handelt es sich noch nicht um ein Integral in der üblichen Form, da das Differenzial $\mathrm{d}x$ nicht an der bei Integralen üblichen Stelle als Faktor bei dem Integranden steht. Ähnlich wie bei der Herleitung zur Mantelflächenformel für Rotationskörper können wir durch Ausklammern von $\mathrm{d}x$ hieraus ein Integral in der bisherigen Form machen:

$$\begin{aligned} L = \int \mathrm{d}L &= \int_a^b \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}f(x))^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)(\mathrm{d}x)^2} \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Wenn wir beachten, dass der in der Wurzel auftretende Term $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ die Ableitung von f an der Stelle x ist, können wir das folgende Ergebnis formulieren.

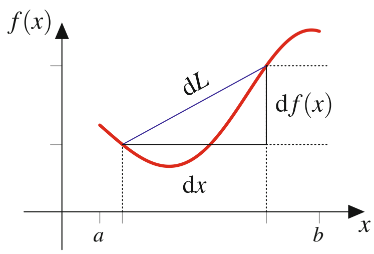

Abb. 7.8 Ein infinitesimaler Linienzug $\mathrm{d}L$ in einer differenzierbaren Kurve

Bogenlänge einer differenzierbaren Kurve

Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Für die Bogenlänge L des Graphen von f im Intervall $[a, b]$ gilt

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (7.6)$$

7.6 Uneigentliche Integrale

Bislang sind wir bei der Betrachtung bestimmter Integrale stets von Funktionen auf beschränkten Intervallen ausgegangen. Gelegentlich ist es sinnvoll, den Begriff des bestimmten Integrals auf Situationen auszudehnen, in denen eine Integrationsgrenze auf ∞ bzw. $-\infty$ gesetzt wird oder in denen der Integrand in einer Integrationsgrenze nicht definiert ist. Integrale dieser Art treten bei sog. Funktionaltransformationen, wie der Laplace- oder der Fourier-Transformation, auf. Diese Transformationen spielen in der Regelungstechnik bzw. in der Signalverarbeitung eine wichtige Rolle.

Definition: Uneigentliches Integral

Es sei $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion mit $b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Im Fall der Existenz des Grenzwertes

$$c := \lim_{\xi \to b} \int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

heißt

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := c$$

uneigentliches Integral. Analog wird dieser Begriff verwendet, wenn die untere Integrationsgrenze oder beide Integrationsgrenzen kritisch sind. Im Fall einer kritischen Untergrenze ist für $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ mit $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\xi \to a} \int_{\xi}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

und im Fall zweier kritischer Grenzen für $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{\xi \to a} \int_{\xi}^t f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\xi \to b} \int_t^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

wobei $t \in (a, b)$ eine beliebige Zwischenstelle darstellt.

Teil II

Teil II

Betrachten wir als erstes Beispiel ein Integral mit unendlicher Obergrenze.

Beispiel

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to\infty}\int_1^\xi \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\xi\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]_1^\xi = \lim_{\xi\to\infty}\left[\frac{1}{x}\right]_\xi^1\\ &= 1-\lim_{\xi\to\infty}\frac{1}{\xi} = 1\end{aligned}$$ ◀

Für den Integranden $f(x) = 1/x$ würde das entsprechende uneigentliche Integral nicht existieren, denn es ist

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_1^\xi \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty}[\ln x]_1^\xi = \infty.$$

Während die Fläche unter der Funktion $1/x$ von der Untergrenze $x = 1$ nach rechts ausdehnend über jeden Wert steigt und damit unbeschränkt ist, fällt die Kurve von $1/x^2$ offenbar so schnell ab, dass diese Fläche beschränkt ist und den Wert 1 als Supremum besitzt.

Betrachten wir nun ein Beispiel, bei dem der Integrand in einer Grenze nicht definiert ist.

Beispiel

Die Funktion $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ist für $x \in (0,1]$ definiert und besitzt in $x = 0$ eine Definitionslücke. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to 0}\int_\xi^1 \frac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\xi\to 0}\left[\sqrt{x}\right]_\xi^1 = 1-\lim_{\xi\to 0}\sqrt{\xi} = 1.\end{aligned}$$ ◀

Ein sehr berühmtes Beispiel eines uneigentlichen Integrals ist die in der Statistik auftretende Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

Beispiel

Das **gaußsche Fehlerintegral**

$$\Phi(x) := \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

besitzt zwar einen stetigen Integranden, jedoch kann eine Stammfunktion nicht als Term aus elementaren Funktionen dargestellt werden. Dieses uneigentliche Integral muss in der Praxis mit Näherungsverfahren, also mittels numerischer Integration (Bd. 2), bestimmt werden. ◀

Schließlich betrachten wir ein uneigentliches Integral mit zwei kritischen Grenzen.

Beispiel

Für $t \in \mathbb{R}$ ist

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to-\infty}\int_\xi^t \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{\xi\to\infty}\int_t^\xi \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{\xi\to-\infty}[\arctan x]_\xi^t + \lim_{\xi\to\infty}[\arctan x]_t^\xi\\ &= \arctan t - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \arctan t\\ &= \frac{2\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass es hierbei in der Tat nicht auf die Wahl der Zwischenstelle t ankommt. ◀

Achtung Ein uneigentliches Integral der Art

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

ist im Allgemeinen nicht definiert als

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Das letzte Integral kann auch existieren, während das uneigentliche Integral nicht existiert, wie das folgende Beispiel zeigt: Es ist zwar wegen $\cos(-\xi) = \cos(\xi)$

$$\begin{aligned}\lim_{\xi\to\infty}\int_{\xi}^\xi \sin x\,\mathrm{d}x &= \lim_{\xi\to\infty}[-\cos x]_{-\xi}^\xi = \lim_{\xi\to\infty}[\cos x]_\xi^{-\xi}\\ &= \lim_{\xi\to\infty}(\cos(\xi)-\cos(-\xi)) = 0,\end{aligned}$$

jedoch existiert für kein $t \in \mathbb{R}$ weder

$$\lim_{\xi\to-\infty}\int_{-\xi}^t \sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to-\infty}[-\cos x]_\xi^t$$

noch

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_t^{\xi}\sin x\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to\infty}[-\cos x]_t^{\xi}$$

und damit auch nicht das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin x\,\mathrm{d}x.$$

Sollte jedoch umgekehrt das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\xi\to-\infty}\int_{\xi}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\xi\to\infty}\int_{t}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existieren, dann existiert auch mit identischem Grenzwert

$$\lim_{\xi\to\infty}\int_{-\xi}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

◀

Aufgaben

7.1 Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_a^b \sin(2\pi t)\,\mathrm{d}t$ für $a = 0, b = 1$ und für $a = 0.5, b = 1.5$. Was fällt auf?
b) $\int_0^1 (x^4 - (x-1)^2 + x(x^2-1) + 2)\,\mathrm{d}x$
c) $\int x(x-1)\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$
d) $\int_0^{\sqrt{\mathrm{e}-1}} \frac{2x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
e) $\int \exp(\sin t)\cos t\,\mathrm{d}t$
f) $\int \frac{1}{x+x^2}\,\mathrm{d}x$
g) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}\,\mathrm{d}x$
h) $\int_1^2 \exp(\sqrt{x+1})\,\mathrm{d}x$
i) $\int -2t\sin(t^2-1)\,\mathrm{d}t$
j) $\int_0^1 \frac{4t}{t^3+t}\,\mathrm{d}t$
k) $\int \frac{1}{2\sqrt{t}(t+1)}\,\mathrm{d}t$

7.2 Eine einstufige Rakete besitze die Startmasse $m = 100\,\mathrm{kg}$, die sich aus der Leermasse von 50 kg, der Nutzlastmasse (Payload) von 10 kg und der Treibstoffmasse von 40 kg zusammensetzt. Die Rakete werde zum Zeitpunkt $t = 0\,\mathrm{s}$ gezündet und mit voller Schubkraft F_0 senkrecht in die Höhe gestartet. Die Treibstoffmasse wird dabei innerhalb von 60 s gleichmäßig verbrannt und vollständig verbraucht. Nach diesem Zeitpunkt fliegt die Rakete ohne Antrieb.

Berechnen Sie die Geschwindigkeit und die Höhe der Rakete zu jedem Zeitpunkt $t > 0$. Zur Vereinfachung betrachten wir dabei eine konstante Gravitation mit $g \approx 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ und vernachlässigen den Luftwiderstand. Welche Höhe und welche Geschwindigkeit erreicht die Rakete mit einer Schubkraft von $F_0 = 1000\,\mathrm{N}$ nach 1 min? Warum hebt die Rakete überhaupt ab, wenn diese Schubkraft gerade einmal dazu ausreicht, die Gewichtskraft der Startmasse von 100 kg zu kompensieren?

7.3 Der Energieverbrauch zweier Maschinen soll miteinander verglichen werden. Die Betriebsdauer T beider Maschinen sei identisch. Maschine 1 habe beim Einschalten eine sehr hohe Leistungsaufnahme $P_1(t)$ (Anlaufphase), die nach einem Zeitpunkt $t_0 \in (0, T)$ auf ein konstantes Niveau absinkt, während Maschine 2 ab Einschaltzeitpunkt über die gesamte Betriebsdauer durch eine konstante Leistungsaufnahme $P_2(t) = P_2$ gekennzeichnet sei:

$$P_1(t) = \begin{cases} P_0\,e^{-\lambda t}, & 0 \le t \le t_0,\\ P_0\,e^{-\lambda t_0}, & t_0 \le t \le T,\end{cases} \qquad P_2(t) = P_2 = \text{const.}$$

Berechnen Sie den gesamten Energieverbrauch W_1 bzw. W_2 von Maschine 1 bzw. 2 über die Betriebszeit T (berechnen Sie die Formel für W_1 und W_2). Es sei $\lambda = 1\,\mathrm{h}^{-1}$, $P_0 = 10\,\mathrm{kW}$, $P_2 = 100\,\mathrm{W}$, $t_0 = 5\,\mathrm{h}$. Ab welcher Betriebszeit T arbeitet dann Maschine 1 sparsamer als Maschine 2, und wie viel Energie wird zu diesem Zeitpunkt verbraucht?

7.4 Die Betriebstemperatur T einer Maschine unterliege einer Schwankung bzgl. der Zeit t gemäß folgender Funktion:

$$T(t) = T_0(\sin(\omega t) + 1) \quad \text{für} \quad t \in [t_0, t_f] \quad \text{mit} \quad \omega > 0.$$

a) Geben Sie eine Formel für die mittlere Betriebstemperatur $\overline{T}$ an, welche die Maschine während ihrer Betriebszeit annimmt.
b) Welche mittlere Temperatur nimmt die Maschine für die Werte

$$T_0 = 50\,^\circ\mathrm{C}, \quad t_0 = 0\,\mathrm{s}, \quad t_f = 30\,\mathrm{s}\ (60\,\mathrm{s}), \quad \omega = 2\pi/20\,\mathrm{s}^{-1}$$

an?

7.5 Skizzieren Sie den Querschnitt der durch die folgenden Berandungsfunktionen bei 360°-Drehung um die x-Achse entstehenden Rotationskörper und berechnen Sie den jeweiligen Rauminhalt:

a) $f : [0, \pi] :\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x$
b) $f : [-R, R] :\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, wobei $R > 0$. Welcher geometrische Grundkörper wird hier betrachtet?

7.6 Skizzieren Sie die folgenden Berandungsfunktionen und berechnen Sie jeweils den Inhalt der Mantelfläche bei dem durch 360°-Drehung um die x-Achse entstehenden Rotationskörper:

a) $f : [0, \frac{2}{3}] \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x^3$
b) $f : [0, \pi] :\to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = \sin x$

Hinweis: In Tabellenwerken für unbestimmte Integrale einer mathematischen Formelsammlung finden Sie für $a, c > 0$ die Formel

$$\int \sqrt{ax^2 + c}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{ax^2 + c} + \frac{c}{2\sqrt{a}} \ln(\sqrt{ax^2 + c} + \sqrt{a}\,x).$$